

EXERCICE (1)

On considère les suites $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ telles que :

$$\begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n V_n}{U_n + V_n} \end{cases}$$

- 1) prouver que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < U_n < V_n$
- 2) montrer que $(U_n)_n$ est croissante et $(V_n)_n$ décroissante
- 3) a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < V_{n+1} - U_{n+1} < \frac{1}{2}(V_n - U_n)$
 b) déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < V_n - U_n \leq \frac{1}{2^n}$
- 4) a) montrer que par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n V_n = 2$
 b) en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n < \sqrt{2} < V_n$

EXERCICE (2)

Soit un réel de $a \in]0, +\infty[$ on considère la suite $(U_n)_n$ définie par : $U_0 = b < a$ et $U_{n+1} = \frac{a^2}{2a - U_n}$

- 1) a) vérifier que $U_{n+1} - a = \frac{a(U_n - a)}{a + (a - U_n)} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$
 b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n < a$
- 2) montrer que $(U_n)_n$ est une suite croissante
- 3) on pose $V_n = \frac{a}{a - U_n}$ pour tout entier naturel n
 a) montrer que $(V_n)_n$ est une suite arithmétique puis calculer U_n en fonction de $n ; b$ et a
 b) déterminer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{a - U_k}$ en fonction de $n ; b$ et a

EXERCICE (3) On considère la suite $(U_n)_n$ définie par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \frac{U_n}{1 + 2^n U_n}$

- 1) calculer U_1 et U_2
- 2) a) montrer que $\frac{1}{U_{n+1}} = \frac{1}{U_n} + 2^n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$
 b) déduire l'expression de U_n en fonction de n

BONUS

Soit $(U_n)_n$ une suite arithmétique de raison r . On $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}$
 m et n deux entiers naturels différents

- 1) démontrer que $S_m = S_n \Leftrightarrow (m+n-1)r = -2U_0$
- 2) en déduire que $S_m = S_n \Rightarrow S_{m+n} = 0$